A picture containing text, vector graphics

Description automatically generated

pricing d’option en utilisant la méthode de simulation monte carlo

Master **272** - IEF    
Parcours Quant  
  
**C++**

**Janvier 2022**

Ludovic DE VILLELONGUE  
Amine MOUNAZIL

Artem STOLBTSOV

Sommaire

[Présentation du sujet 3](#_Toc94266513)

[Explication des mathématiques permettant de répondre au sujet 3](#_Toc94266514)

[Présentation du code clairement commenté 4](#_Toc94266515)

[Problèmes rencontrés et manière de les surmonter 5](#_Toc94266516)

[Conclusion 5](#_Toc94266517)

# Présentation du sujet

Les inputs à utiliser pour pricer une option sont le sous-jacent, le strike, la maturité, les taux d’intérêts et la volatilité implicite. La méthode de Monte Carlo est utilisée pour le pricing d’options en générant de nombreuses trajectoires de prix possibles, chacune ayant un payoff associé. Ces payoffs sont ensuite actualisés et leur moyenne permet d’obtenir le prix de l’option. Comparée à Black Scholes et aux arbres de pricing, la méthode de Monte Carlo est particulièrement utile dans l’évaluation d’options avec de multiples sources d’incertitude ou avec des caractéristiques complexes, telles les options lookback et asiatiques. Cette méthode consiste à faire usage de la loi des grands nombres afin de gagner en précision. Ainsi, l’essence de celle-ci est de calculer de nombreux tirages à partir d’une distribution normale, que l’on appelle , puis de calculer le payoff via la formule suivante : . Dans ce cas, la valeur de est le payoff du call ou du put. En faisant la moyenne des payoff et en prenant le taux sans risque, nous obtenons le prix approximatif de l’option.

# Explication des mathématiques permettant de répondre au sujet

Monte Carlo :

Un mouvement brownien géométrique est utilisé pour modéliser l’évolution des prix. Il est donné par l’équation différentielle stochastique suivante : où est le prix du sous-jacent, le drift, la volatilité et B le mouvement brownien. Afin de modéliser un mouvement brownien gaussien, nous avons utilisé l’algorithme de Box Muller, convertissant 2 variables aléatoires uniformes en une variable aléatoire gaussienne standard.

Option Européenne :

Le prix d’une option vanille européenne est donnée par la prévision actualisée du payoff à maturité soit : . Cette prévision est conditionnée à la mesure risque neutre, qui égalise le drift et le taux sans risque . La solution de l’équation différentielle stochastique précédente, est obtenue grâce au Lemme d’Itô . En passant cette équation à l’exponentielle, on obtient le prix de l’option à la date t : . La valeur du payoff correspond donc à .

Grecques pour option européenne :

Une option a des sensibilités qui se nomment delta , gamma , vega , theta et rho . Chacune de ces sensibilités illustre comment fluctue le prix de l’option en fonction du changement d’une caractéristique du sous-jacent.

Avec : le prix de l’option, la valeur du spot en t, la volatilité du sous-jacent, l’instant présent, le taux sans risque.

Option Asiatique :

Une option arithmétique est un contrat qui permet au détenteur d'utiliser le prix moyen d'un actif sous-jacent comme point de référence tout en maintenant un prix d'exercice fixe. Cette moyenne peut être indiquée sur toute la durée de l'option, le mois précédent, la semaine précédente, etc. L'observation peut se faire sur une base quotidienne, hebdomadaire, mensuelle, trimestrielle ou annuelle, par exemple. Le payoff d’une telle option peut s’écrire sous la forme dans le cas d’un call asiatique à cours moyen et strike fixe et sous la forme dans le cas d’un put asiatique à cours moyen et strike fixe. Dans le cas d’une option asiatique arithmétique à cours fixe et strike flottant, le payoff s’écrit de la forme dans le cas d’un call et dans le cas d’un put, avec .

Option Lookback :

Le prix d'exercice est d'abord fixé comme il le serait pour une option ordinaire dans cette variante. Le gain de l'acheteur de l'option à l'expiration, quant à lui, est calculé en comparant le prix d'exercice au prix le plus avantageux obtenu pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d’un call s’écrit sous la forme et pour un put.

Option Digitale :

Les options digitales sont semblables aux options vanilles. Elles diffèrent seulement par le fait que le paiement à l’expiration a seulement deux valeurs. Dans ce cas . En particulier, le payoff est donnée par une fonction Heaviside où quand et sinon.

Option Barrière :

Une option barrière est une option dont le rendement dépend du fait que l’actif sous-jacent a atteint ou dépassé un prix prédéterminé. Le prix à l’instant t est comparé avec le prix des barrières fixées et . Si le prix du sous-jacent sort des barrières, le payoff se voit modifé tel que et deviennent respectivement , , ou .

# Présentation du code clairement commenté

Le fichier source Payoff\_Option.cpp contient :

* l’appel du constructeur et destructeur de Call\_Put\_Option
* plusieurs méthodes en dehors de la classe permettant :
  + de générer la variable aléatoire gaussienne
  + de générer la fonction de payoff d’une option digitale
  + de retourner des valeur positives
  + de calculer le payoff d’une option en fonction du type choisi
  + d’afficher les paramètres sélectionnés

Le fichier header Payoff\_Option.h contient :

* les paramètres de la classe définis en privée
* la définition du constructeur et du destructeur de Call\_Put\_Option
* le choix des paramètres auxquels on souhaite accéder via des getters et des setters
* les méthodes utilisées lors de l’appel de la classe

Le fichier header GreeksCP.h contient :

* Les fonctions de calcul utiles au calcul des différents grecques
* Les fonctions de calcul de grecques pour des options européennes

Le fichier source Call\_Class.cpp contient :

* la création d’un objet de classe
* la fixation des paramètres de pricing
* le choix du type d’option
* le choix des méthodes à retourner

# Problèmes rencontrés et manière de les surmonter

Afin d’éviter les duplications, nous avons repris plusieurs fois la méthode calculant le payoff en fonction du type d’option choisi. L’implémentation des options asiatiques est gourmande en puissance de calcul et n’est pas du tout optimale pour un très grand nombre de simulations.

Nous avons par ailleurs essayé de pricer des options américaines et bermudiennes en utilisant la méthode de Monte Carlo. Cependant, le fait que la date d’exercice puisse être choisie pose problème car cela nécessite d’utiliser une méthode plus poussée de Monte Carlo impliquant la régression par moindres carrés via l’algorithme de Longstaff et Schwartz. L’utilisation de cette technique nécessite de reculer dans le temps tandis que la méthode de Monte Carlo traditionnelle implique d’avancer dans le temps. Par ailleurs, les erreurs d’approximation à prendre en compte sont nombreuses, rendant cette approche beaucoup plus complexe.

# Conclusion

Plus le nombre de simulations est élevée, plus le prix de l’option est précis. En revanche, cela entraîne un allongement du temps d’exécution. Travailler plus amplement sur la vitesse d’exécution de notre programme serait un axe d’amélioration.

En outre, il serait pertinent de comparer les performances de calcul de la méthode de Monte Carlo et de Black Scholes, ce qui permettrait de choisir quel est le meilleur modèle en fonction des paramètres pris et du type d’option.

Enfin la méthode de Monte Carlo classique présente une erreur de l’ordre de , . On peut diminuer l’erreur en augmentant , au prix d’un coût de calcul plus important, ou en diminuant . Les méthodes dites de réduction de variance ont pour but de construire un estimateur sans biais de variance inférieure à la méthode de Monte Carlo classique, tel que et . Appliquer cette méthode serait une extension intéressante pour améliorer la précision de calcul.